ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN HOÀI TRANG

PHƯƠNG PHÁP LẶP SONG SONG TÌM ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CỦA CÁC TOÁN TỬ BREGMAN KHÔNG GIÃN MẠNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 8 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Trương Minh Tuyên

Thái Nguyên – 2019

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến TS. Trương Minh Tuyên, người đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập nghiên cứu để tôi có thể hoàn thành luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, các thầy giáo, cô giáo trong khoa Toán -Tin, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại Trường.

Nhân dịp này tôi cũng xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu và các đồng nghiệp của trường THPT Phổ Yên, gia đình, bạn bè, người thân đã luôn động viện, giúp đỡ và tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn này.

Mục lục

Một số ký hiệu và viết tắt

X	không gian Banach
X^*	không gian đối ngẫu của X
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập các số thực không âm
$\cap$	phép giao
$\operatorname{int} M$	phần trong của tập hợp M
$\inf M$	cận dưới đúng của tập hợp số M
$\sup M$	cận trên đúng của tập hợp số M
$\max M$	số lớn nhất trong tập hợp số M
$\min M$	số nhỏ nhất trong tập hợp số M
$\operatorname{argmin}_{x\in X} F(x)$	tập các điểm cực tiểu của hàm F trên X
$\emptyset$	tập rỗng
$\operatorname{dom}(A)$	miền hữu hiệu của toán tử (hàm số) A
$R(A)$	miền ảnh của toán tử A
A^{-1}	toán tử ngược của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$

$x_n \to x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
$F(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
$\hat{F}(T)$	tập điểm bất động tiệm cận của ánh xạ T
∂f	dưới vi phân của hàm lồi f
$\bigtriangledown f$	gradient của hàm f
$\overline{M}$	bao đóng của tập hợp M
proj_C^f	phép chiếu Bregman lên C
$D_f(x, y)$	khoảng cách Bregman từ x đến y

Mở đầu

Đầu thế kỉ XX đã xuất hiện nhiều định lý điểm bất động nổi tiếng, trong đó phải kể đến nguyên lý điểm bất động Brouwer (1912), nguyên lý ánh xạ co của Banach (1922). Các kết quả này đã được mở rộng ra các lớp ánh xạ và không gian khác nhau. Lý thuyết điểm bất động có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực toán học khác nhau như: Giải tích số, phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng, tối ưu hóa, các bài toán liên quan đến kinh tế như bài toán cân bằng, bài toán chấp nhận lồi và bài toán bất đẳng thức biến phân ...

Bài toán về điểm bất động có hai lĩnh vực được quan tâm nghiên cứu chủ yếu, đó là: Ta quan tâm đến sự tồn tại nghiệm của phương trình $T(x) = x$, trong đó T là một ánh xạ từ tập con C của không gian X vào X và nghiệm x_0 của nó được gọi là một điểm bất động của T. Trong rất nhiều trường hợp quan trọng việc giải một phương trình được đưa về việc tìm điểm bất động của một ánh xạ thích hợp. Chẳng hạn, nếu X là một không gian tuyến tính, S là một ánh xạ trong X và y là một phần tử cố định thuộc X, thì nghiệm của phương trình $S(x) = y$ chính là điểm bất động của ánh xạ T được xác định bởi $T(x) = S(x) + x - y$, với $x \in X$. Bên cạnh đó việc tìm ra các phương pháp tìm hay xấp xỉ điểm bất động của một ánh xạ cũng thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều người làm toán trong và ngoài nước.

Một trong những bài toán về xấp xỉ điểm bất động được quan tâm nghiên cứu nhiều đó là bài toán tìm điểm bất động của một hay một họ ánh xạ kiểu không giãn trong không gian Hilbert hay Banach. Một trong những khó khăn khi nghiên cứu bài toán xấp xỉ điểm bất động và các bài toán liên quan khác (chẳng hạn bài toán tìm không điểm) trong không gian Banach là ta phải sử dụng đến ánh xạ đối ngẫu của không gian. Ta biết rằng trong trường hợp tổng quát ánh xạ đối ngẫu rất khó xác định và ngoài ra nó không có tính chất tuyến tính. Do đó việc tìm dạng tường minh của toán tử giải tương ứng với toán tử đơn điệu trong không gian Banach là "rất khó". Để khắc phục khó khăn này, người ta đã sử dụng khoảng cách Bregman để thay thế cho khoảng cách thông thường và thay thế ánh xạ đối ngẫu bởi gradient của một phiếm hàm lồi, khả vi Gâteaux.

Mục đích của luận văn này là trình bày lại các kết quả của tác giả Tuyen T.M. trong bài báo [26] về hai phương pháp chiếu tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn toán tử Bregman không giãn mạnh, cùng với một số ứng dụng cho việc giải các bài toán liên quan khác trong không gian Banach phản xạ.

Nội dung của luận văn được chia làm hai chương chính:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, luận văn đề cập đến một số vấn đề về không gian Banach phản xạ, khoảng cách Bregman, phép chiếu Bregman và toán tử Bregman không giãn mạnh.

Chương 2. Hai phương pháp chiếu tìm điểm bất động chung của hữu hạn toán tử Bregman không giãn mạnh

Trong chương này luận văn tập trung trình bày lại một cách chi tiết các kết quả của Tuyen T.M. trong tài liệu [26] về các phương pháp chiếu lai ghép và phương pháp chiếu thu hẹp tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn toán tử Bregman không giãn mạnh trong không gian Banach phản xạ. Ngoài ra, một số ứng dụng của các định lý chính cho việc giải một số lớp bài toán liên quan khác cũng được giới thiệu ở chương này.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này bao gồm ba mục. Mục 1.1 trình bày về một số tính chất cơ bản của không gian phản xạ. Mục 1.2 giới thiệu về khoảng cách Bregman, phép chiếu Bregman và toán tử Bregman không giãn mạnh. Mục 1.3 đề cập đến một số phương pháp tìm điểm bất động của toán tử Bregman không giãn mạnh. Nội dung của chương này được tham khảo trong các tài liệu [1, 17, 20, 24, 27].

1.1 Không gian Banach phản xạ

Trước hết, trong mục này chúng tôi nhắc lại khái niệm không gian Banach phản xạ.

Định nghĩa 1.1.1. Một không gian Banach X được gọi là không gian phản xạ, nếu với mọi phần tử x^{**} của không gian liên hợp thứ hai X^{**} của X, đều tồn tại phần tử x thuộc X sao cho

$$\langle x, x^* \rangle = \langle x^*, x^{**} \rangle \text{ với mọi } x^* \in X^*.$$

Chú ý 1.1.2. Trong luận văn, chúng tôi sử dụng ký hiệu $\langle x^*, x \rangle$ để chỉ giá trị của phiếm hàm $x^* \in X^*$ tại $x \in X$.

Mệnh đề 1.1.3. [1] *Cho X là một không gian Banach. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

i) *X là không gian phản xạ.*

ii) *Mọi dãy bị chặn trong X, đều có một dãy con hội tụ yếu.*

Mệnh đề dưới đây cho ta mối liên hệ giữa tập đóng và tập đóng yếu trong không gian tuyến tính định chuẩn.

Mệnh đề 1.1.4. *Nếu C là tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian không gian tuyến tính định chuẩn X, thì C là tập đóng yếu.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại dãy $\{x_n\} \subset C$ sao cho $x_n \rightharpoonup x$, nhưng $x \notin C$. Theo định lý tách các tập lồi, tồn tại $x^* \in X^*$ tách ngặt x và C, tức là tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho

$$\langle y, x^* \rangle \leq \langle x, x^* \rangle - \varepsilon,$$

với mọi $y \in C$. Đặc biệt, ta có

$$\langle x_n, x^* \rangle \leq \langle x, x^* \rangle - \varepsilon,$$

với mọi $n \geq 1$. Ngoài ra, vì $x_n \rightharpoonup x$, nên $\langle x_n, x^* \rangle \to \langle x, x^* \rangle$. Do đó, trong bất đẳng thức trên, cho $n \to \infty$, ta nhận được

$$\langle x, x^* \rangle \leq \langle x, x^* \rangle - \varepsilon,$$

điều này là vô lý. Do đó, điều giả sử là sai, hay C là tập đóng yếu.
Mệnh đề được chứng minh. □

Chú ý 1.1.5. Nếu C là tập đóng yếu, thì hiển nhiên C là tập đóng.

1.2 Khoảng cách Bregman và ánh xạ Bregman không giãn mạnh

1.2.1 Đạo hàm Gâteaux và đạo hàm Fréchet

Cho X là một không gian Banach và cho $f: X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ là một hàm số. Ta ký hiệu miền hữu hiệu $\mathrm{dom} f$ là tập $\{x \in X : f(x) < +\infty\}$. Với mỗi $x \in$